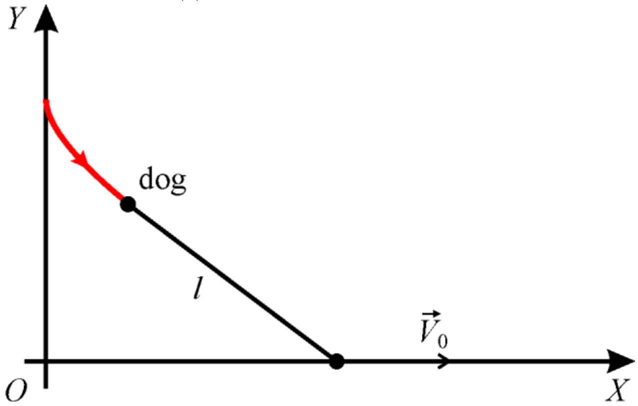
Задача 1: «Прогулка с собакой»

Во время прогулки собака и ее хозяин на некоторое время остановились, причем поводок оставался слегка натянутым. Внезапно хозяин побежал по горизонтальной прямой дорожке с постоянной скоростью V_0 в направлении, перпендикулярном начальному положению поводка. Поводок длиной l можно считать легким и практически нерастяжимым, и он так и остается слегка натянутым на протяжении всего «забега» хозяина с собакой. Собака всегда бежит в направлении вдоль поводка. Участок земли, по которому движется собака, тоже горизонтален. Считайте, что в момент начала движения хозяин находился в точке O, являющейся началом прямоугольной декартовой системы координат XOY, поводок лежал на оси OY, а хозяин побежал вдоль оси OX в ее положительном направлении.



1) Найдите модуль и направление ускорения собаки $\vec{a}_0^{\text{соб}}$ в самом начале ее движения. Изобразите на рисунке оси OX и OY и покажите стрелкой направление этого ускорения.
2) Найдите модуль скорости $V_A^{\text{соб}}$, а также модуль и направление ускорения собаки $\vec{a}_A^{\text{соб}}$ при прохождении ею точки A, в которой поводок составляет с линией движения хозяина угол $\alpha = 45°$. Изобразите на рисунке оси OX и OY и покажите стрелкой направление ускорения собаки в точке A.
3) Получите уравнение траектории собаки (явно, в виде $y = y(x)$ или $x = x(y)$, либо в параметрическом виде). Сделайте примерный рисунок, изобразив траекторию с сохранением ее основных особенностей (относительно системы координат XOY).

Математическая подсказка: $\int\limits_x^{\pi/2} \frac{dy}{\sin y} = \ln\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right].$

4) Найдите закон движения собаки (то есть зависимость ее координат x и y от времени t). Получите и запишите зависимость модуля скорости собаки от времени $V^{\text{соб}}(t)$.
5) Считая, что ускорение собаки создается только горизонтальной компонентой F силы ее взаимодействия с землей, найдите зависимость $F(t)$ этой компоненты от времени. Небольшими «скачками» в этой зависимости (связанными с отсутствием непрерывности отталкивания собаки от земли) пренебречь. Масса собаки равна m.
6) Каким будет закон движения собаки (зависимости x от t и y от t) спустя время, значительно превышающее величину $\tau = \frac{l}{V_0}$, если заданное в условии движение хозяина с собакой сохранится?
7) В момент времени, к которому собака уже пробежала расстояние, равное l, за собакой из начальной точки ее движения полетела муха, двигаясь со скоростью, равной по модулю V_0 всегда, кроме очень малого времени разгона в самом начале полета. Муха летит в точности вдоль траектории собаки. На какое минимальное расстояние $r_{\min}$ сможет приблизиться муха к собаке за очень большое время?
8) Найдите модуль ускорения мухи $a_A^{\text{мух}}$ при прохождении ею точки A.

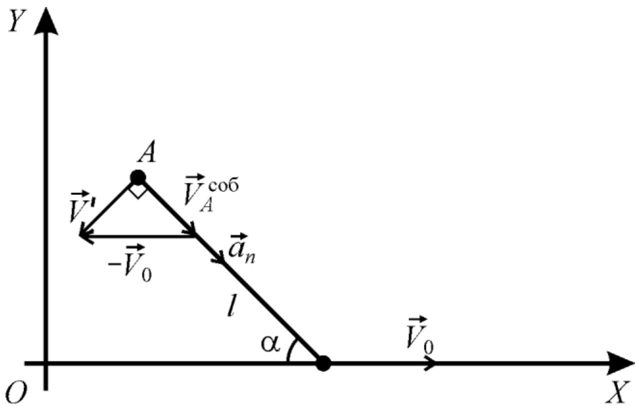
Возможное решение

1) Собака начинает движение из положения покоя в направлении против оси *OY*. Хозяин движется по оси *OX*, и его координата изменяется по закону $x(t) = V_0 t$. Так как длина поводка неизменна, то для очень малых времен *t* координата собаки зависит от времени по закону $y(t) = \sqrt{l^2 - V_0^2 t^2} \approx l - \frac{V_0^2 t^2}{2l}$. Значит, начальное ускорение собаки направлено против оси *OY* и равно по модулю $a_0^{\text{соб}} = V_0^2 / l$ (или проекция начального ускорения собаки на ось *OY* равна $a_y(t) = -V_0^2 / l$).

Можно действовать и другим способом. Перейдем в систему отсчета, связанную с хозяином (движущуюся с постоянной скоростью V_0 вдоль оси *OX*). В этой системе отсчета мгновенная скорость собаки направлена перпендикулярно поводку (так как поводов натянут) и в начальный момент движения равна V_0 по модулю. Следовательно, ускорение собаки в этот момент имеет только составляющую вдоль поводка (она направлена противоположно оси *OY*), и эта составляющая равна по модулю V_0^2 / l.

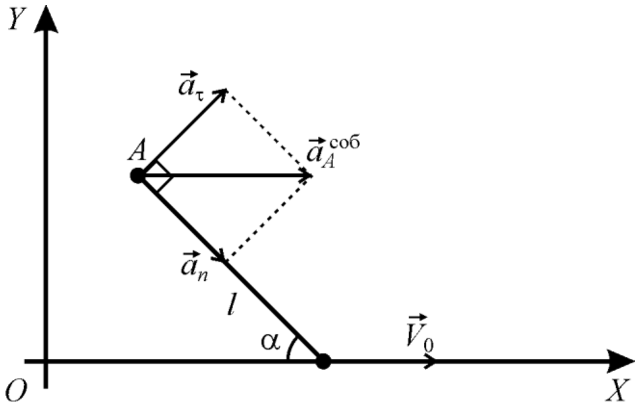
2) По условию задачи, вектор скорости собаки все время направлен вдоль поводка. Снова используем неизменность длины поводка, и заметим, что проекции скоростей собаки и хозяина на направление поводка должны совпадать. Отсюда следует, что в точке *A* модуль скорости собаки $V_A^{\text{соб}} = V_0 \cos\alpha = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$.

Заметим также, что проекция скорости собаки на ось *OY* в этот момент $V_y = -V_0 \cos\alpha \sin\alpha = -\frac{V_0}{2} \sin 2\alpha$, и ее величина как функция угла α достигает максимума как раз при $\alpha = 45°$. Поэтому при данном значении угла α проекция ускорения собаки на ось *OY* равна нулю. Значит, искомое ускорение собаки направлено вдоль оси *OX*.



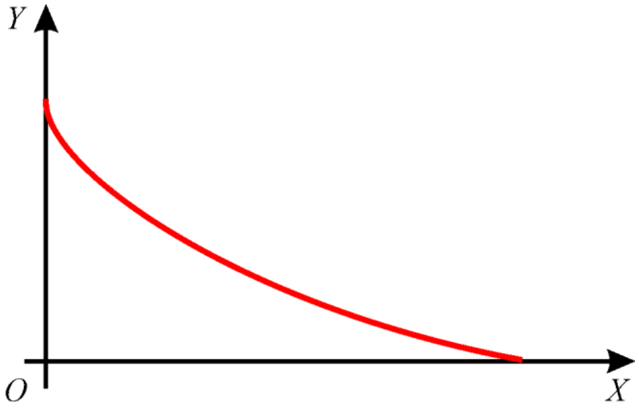
Для определения модуля ускорения перейдем в систему отсчета, связанную с хозяином (движущуюся с постоянной скоростью V_0 вдоль оси *OX*). В этой системе отсчета собака совершает неравномерное движение по окружности радиусом l, и в рассматриваемый момент времени ее скорость $\vec{V}' = \vec{V}_A^{\text{соб}} - \vec{V}_0$ направлена перпендикулярно поводку и равна по модулю $\frac{V_0}{\sqrt{2}}$. Следовательно, центростремительное ускорение собаки равно $|\vec{a}_n| = \frac{V'^2}{l} = \frac{V_0^2}{2l}$.

Полное ускорение, направленное в положительном направлении оси *OX*, есть векторная сумма центростремительного и касательного ускорения. Это означает, что модуль ускорения собаки равен $a_A^{\text{соб}} = |\vec{a}_n| / \cos\alpha = |\vec{a}_n| \sqrt{2} = \frac{V_0^2}{l\sqrt{2}}$. Итак: $\vec{a}_A^{\text{соб}} = \frac{V_0^2}{l\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_x$.



3) Легко найти y-координату собаки в тот момент времени, когда поводок составляет угол α с осью OX: $y(\alpha) = l \cdot \sin\alpha$. С другой стороны, $\pi - \alpha$ – это угол наклона касательной к траектории собаки, то есть $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow l\cos\alpha \frac{d\alpha}{dx} = -\operatorname{tg}\alpha$. Следовательно, $dx = -l\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}d\alpha$. Интегрируя это соотношение с учетом того, что $\alpha = \frac{\pi}{2}$ при $x = 0$, находим: $x(\alpha) = l \cdot \int\limits_{\alpha}^{\pi/2} \frac{\cos^2\beta}{\sin\beta} d\beta = l \cdot \left\{ \ln\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] - \cos\alpha \right\}$ (здесь можно воспользоваться «математической подсказкой»). Итак, мы получили уравнение траектории в параметрическом виде (угол α выступает в качестве параметра). Выразив α через y, можно найти и уравнение траектории в явном виде: $x(y) = l \cdot \ln\left(\frac{l + \sqrt{l^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{l^2 - y^2}$. Кривая, определяемая этим уравнением, называется ***трактрисой***.

Изобразим эту траекторию (о ее виде можно догадаться и без вывода уравнения траектории – просто представив себе движение собаки):



Основные особенности:

- вертикальная касательная в начальной точке;
- асимптотическое стремление к оси x;
- монотонное убывание с выпуклостью графика вниз.

4) Ясно, что $x + l\cos(\alpha) = l \cdot \ln\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = V_0 t$, так как это в точности координата хозяина в момент времени t. Отсюда легко найти, что

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\exp\left(\frac{V_0t}{l}\right)\Rightarrow\cos\alpha=\operatorname{th}\left(\frac{V_0t}{l}\right)\equiv\frac{e^{V_0t/l}-e^{-V_0t/l}}{e^{V_0t/l}+e^{-V_0t/l}}.$$

Таким образом, $x(t)=V_0t-l\cdot\operatorname{th}\left(\frac{V_0t}{l}\right)$. С учетом того, что $\sin\alpha=\sqrt{1-\operatorname{th}^2\left(\frac{V_0t}{l}\right)}=\operatorname{ch}^{-1}\left(\frac{V_0t}{l}\right)$, находим также $y(t)=l\cdot\operatorname{ch}^{-1}\left(\frac{V_0t}{l}\right)$. Запись через гиперболические функции короче, но можно все записывать и через экспоненты. Дифференцируя эти выражения, находим, что $V_x(t)=V_0\cdot\operatorname{th}^2\left(\frac{V_0t}{l}\right)$, $V_y(t)=V_0\cdot\operatorname{th}\left(\frac{V_0t}{l}\right)\cdot\operatorname{ch}^{-1}\left(\frac{V_0t}{l}\right)$, и поэтому $V^{\text{соб}}(t)=\sqrt{V_x^2+V_y^2}=V_0\cdot\operatorname{th}\left(\frac{V_0t}{l}\right)$.

Впрочем, модуль скорости можно найти и без дифференцирования: как мы видели в пункте 2, из условия неразрывности нити следует, что $V=V_0\cos\alpha$, откуда с учетом выражения для косинуса получаем тот же ответ.

5) После еще одного дифференцирования замечаем, что $a_x(t)=2\frac{V_0^2}{l}\cdot\operatorname{th}\left(\frac{V_0t}{l}\right)\operatorname{ch}^{-2}\left(\frac{V_0t}{l}\right)$, $a_y(t)=\frac{V_0^2}{l}\cdot\left[1-2\operatorname{th}^2\left(\frac{V_0t}{l}\right)\right]\operatorname{ch}^{-1}\left(\frac{V_0t}{l}\right)$. Поэтому $a(t)=\frac{V_0^2}{l}\cdot\operatorname{ch}^{-1}\left(\frac{V_0t}{l}\right)$. Так как по условию это ускорение создается искомой горизонтальной компонентой силы взаимодействия собаки с землей (сила натяжения поводка пренебрежимо мала), то $F(t)=ma(t)=\frac{mV_0^2}{l}\cdot\operatorname{ch}^{-1}\left(\frac{V_0t}{l}\right)$.

6) Ответ на этот вопрос очевиден и без вычислений: спустя такое большое время собака будет двигаться практически по оси x, и поэтому: $x(t)\approx V_0t-l$ при $t>>\frac{l}{V_0}$, а $y(t)\approx 0$.

7) Пренебрегая «очень малым» временем разгона мухи, находим, что разность модулей скоростей мухи и собаки $V_0-V(t)=V_0\cdot\left[1-\operatorname{th}\left(\frac{V_0t}{l}\right)\right]$. Таким образом, муха за очень большое время приблизится к собаке вдоль траектории на расстояние

$$s=\int_{t_0}^{\infty}[V_0-V(t)]dt=l\cdot\int_{z_0}^{\infty}[1-\operatorname{th}(z)]dz=2l\cdot\int_{z_0}^{\infty}\frac{e^{-z}}{e^z+e^{-z}}dz=l\cdot\int_0^{\exp(-2z_0)}\frac{dy}{1+y}=l\cdot\ln\left(1+e^{-2z_0}\right)$$

(здесь t_0 – время начала движения мухи, $z_0=V_0t_0/l$, и при вычислении интеграла сделана замена переменной $y=e^{-2z}$). Согласно условию, $l=\int_0^{t_0}V(t)dt$, то есть $1=\int_0^{z_0}\operatorname{th}z\,dz=\ln(\operatorname{ch}z_0)$. Значит, $z_0=\operatorname{arcch}e$. После преобразования гиперболических функций получим: $e^{-2z_0}=\left(e-\sqrt{e^2-1}\right)^2$, то есть $s=l\cdot\ln\left(1+\left(e-\sqrt{e^2-1}\right)^2\right)$.

Поэтому минимальное расстояние между мухой и собакой через очень большое время (когда хозяин, собака и муха движутся друг за другом по оси x) равно

$$r_{\min}=l-s=l\left[1-\ln\left(1+\left(e-\sqrt{e^2-1}\right)^2\right)\right]\approx 0{,}964l.$$

8) Из пункта 2 нам известны модуль скорости собаки в точке A: $V=\frac{V_0}{\sqrt{2}}$ и центростремительная компонента ее ускорения в этой точке $|\vec{a}_n|=\frac{V_0^2}{2l}$. Значит, радиус

кривизны траектории собаки в точке A равен $R_A == \frac{V^2}{|\vec{a}_n|} = l$, и поэтому модуль ускорения мухи в точке A равен $a_A^{\text{мух}} = \frac{V_0^2}{l}$.